

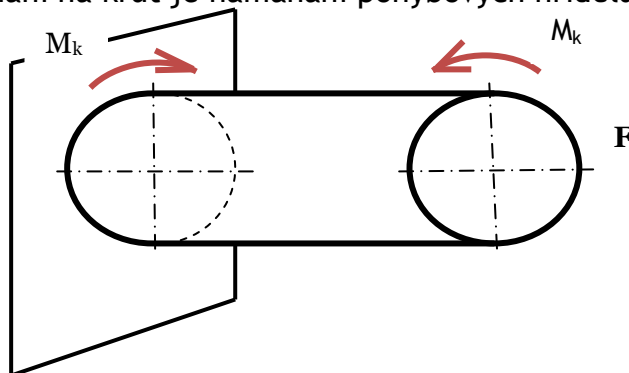
NAMÁHÁNÍ NA KRUT

Vnější zatěžující síly mohou na tělesa působit různě. V průřezích těles vznikají různá napětí. Rozeznáváme pět základních případů jednoduchého (prostého) namáhání těles:

1. TAH
2. TLAK
3. SMYK (STŘIH)
4. KRUT
5. OHYB

Napětí v průřezu a pevnostní rovnice pro krut

Typický příklad namáhání na krut je namáhání pohybových hřídelů.



Krouticí moment M_k působí v rovině kolmé k ose hřídele. Tímto momentem bude namáhán každý průřez hřídele stejně. Účinek vnitřních sil vyrovnávající krouticí moment M_k musí mít také charakter momentu. Vnitřní síly musí tvořit silovou dvojici a působit v rovnoběžné rovině s rovinou, která je zatížena krouticím momentem M_k . Vnitřní síly musí působit tečně k namáhanému průřezu. Ve stejném směru musí působit i napětí. Napětí v krutu je napětí tečné a značíme jej τ_k .

Napětí v krutu není rozloženo v namáhaném průřezu rovnoměrně, je rozloženo, takže maximální napětí působí na povrchu hřídele a minimální (nulové) v ose hřídele.

Při namáhání na krut není průřezovou charakteristikou plošný obsah S , ale veličina respektující velikost, tvar a rozložení plochy vůči osám souměrnosti a to modul průřezu v krutu w_k a kvadratický moment průřezu v krutu J_p .

Napětí v krutu τ_k [MPa] se vypočítá ze vztahu.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$$

M_k Krouticí moment [Nmm]

W_k modul průřezu v krutu [mm³]

Pokud nemá nastat deformace, nesmí napětí τ_k překročit hodnotu dovoleného napětí τ_{Dk} .

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Průřezovou charakteristiku vypočítáme ze vztahu:

$$W_k \geq \frac{M_k}{\tau_{Dk}}$$

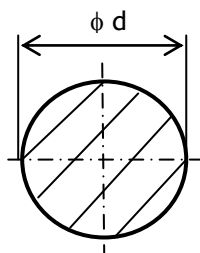
Hřídel lze bezpečně zatížit krouticím momentem M_k :

$$M_k \leq W_k \cdot \tau_{Dk}$$

Kvadratický moment průřezu J_p a modul průřezu v krutu W_k

Vztahy pro výpočet průřezových charakteristik různých tvarů ploch jsou uvedeny ve Strojnických tabulkách.

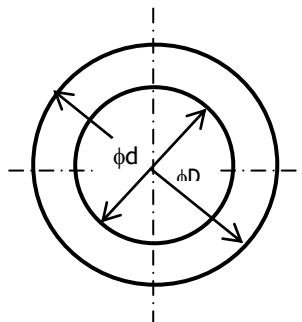
W_k a J_p pro kruhový průřez:



$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 \cong 0,1 d^4$$

$$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cong 0,2 d^3$$

W_k a J_p pro mezikruhový průřez:

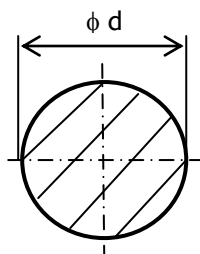


$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \cong 0,1 (D^4 - d^4)$$

$$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D} \cong 0,2 \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

Řešený příklad 1

Vypočítejte napětí τ_k , které vznikne v hřídeli o $\phi d = 65$ mm zatíženém krouticím momentem $M_k = 2\,500$ Nm.



$$M_k = 2\,500 \text{ Nm} \cong 2\,500\,000 \text{ Nmm}$$

Vypočítáme průřezovou charakteristiku - modul průřezu v krutu W_k :

$$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \quad W_k = \frac{\pi}{16} \cdot 65^3$$

$$W_k = 53\,922 \text{ mm}^3$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet napětí v krutu τ_k :

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \quad \tau_k = \frac{2\,500\,000}{53\,922}$$

$$\tau_k = 46,4 \text{ MPa}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



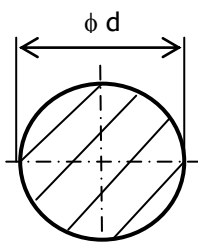
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V hřídeli vznikne napětí $\tau_k = 46,4 \text{ MPa}$

Řešený příklad 2:

Vypočítejte průměr hřídele ϕd , který přenáší krouticí moment $M_k = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$.
Hřídel je vyroben z materiálu 11 500, $\tau_{Dk} = 85 \text{ MPa}$.



Navrhujeme rozměr hřídele - dimenzujeme ze vztahu:

$$\frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Upravíme vztah pro výpočet průměru hřídele z průřezové charakteristiky W_k .

$$W_k \geq \frac{M_k}{\tau_{Dk}} \quad W_k \geq \frac{3,2 \cdot 10^6}{85}$$

$$W_k = 37\,647,1 \text{ mm}^3$$

Průměr hřídele vypočítáme z průřezové charakteristiky W_k :

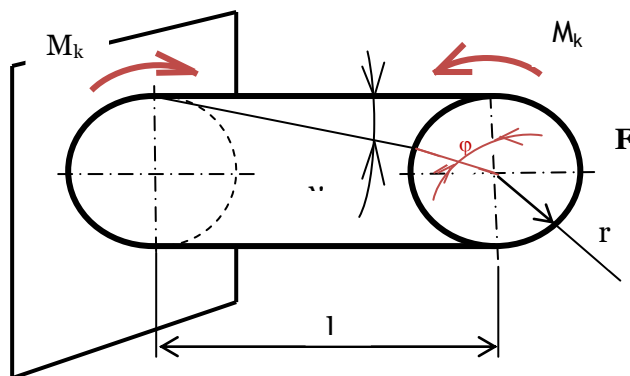
$$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 W_k}{\pi}} \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 37\,647,1}{\pi}}$$

$$d = 57,66 \text{ mm}$$

Minimální průměr hřídele musí být 57,7mm.

Deformace hřídelů namáhaných na krut

 γ [rad] zkos φ [rad] úhel natočení průřezu l [mm] délka hřídele r [mm] poloměr hřídele

Sledujeme-li deformace u hřídele zatíženého v délce l krouticím momentem M_k zjišťujeme, že natočení hřídele v místě vetknutí je nulové, a že nejvíce pootočený je průřez na konci nosníku v délce l . Toto natočení popisujeme pomocí úhlu natočení průřezu φ [rad].

Úhel natočení průřezu φ odvodíme:

Z podobnosti trojúhelníků vyplývá:

$$\gamma \cdot l = \varphi \cdot r$$

Úhel φ :

$$\varphi = \frac{\gamma \cdot l}{r}$$

Z Hookova zákona platí pro zkos γ :

$$\tau_k = G \cdot \gamma$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

G je modul pružnosti materiálu ve smyku [MPa]

Zkos γ :

$$\gamma = \frac{\tau_k}{G}$$

Dosadíme do vztahu pro úhel natočení φ :

$$\varphi = \frac{\tau_k \cdot l}{G \cdot r}$$

Do vztahu dosadíme vztah pro výpočet τ_k , $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{W_k \cdot G \cdot r}$$

Nebot' platí: $J_p = W_k \cdot r$

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{J_p \cdot G}$$

Úhel natočení z tohoto vztahu vychází v radiánech, pro přepočet na stupně platí:

$$\varphi^\circ = \varphi \cdot \frac{180}{\pi}$$

Řešený příklad 3:

Určete velikost úhlu zkroucení φ° kruhového hřídele, který je namáhám krouticím momentem $M_k = 10\,000\text{ Nm}$. Délka hřídele je $l = 3,5\text{ m}$, $\tau_{Dk} = 120\text{ MPa}$, $G = 8 \cdot 10^4\text{ MPa}$.

$$M_k = 10\,000\text{ Nm} \cong 10\,000\,000\text{ Nmm}$$

$$l = 3,5\text{ m} \cong 3\,500\text{ mm}$$

Vypočítáme průřezovou charakteristiku W_k $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$:

$$W_k = \frac{M_k}{\tau_k} \quad W_k = \frac{10\,000\,000}{120}$$

$$W_k = 83\,333,3\text{ mm}^3$$

Z průřezové charakteristiky vypočítáme průměr hřídele d , $W_k = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$:



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 W_k}{\pi}} \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 83\,333,33}{\pi}}$$

$$d = 75,15 \text{ mm}$$

Vypočítáme kvadratický moment průřezu J_p :

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 \quad J_p = \frac{\pi}{32} \cdot 75,15^4$$

$$J_p = 3\,131\,254,6 \text{ mm}^4$$

Dosadíme do vztahu pro výpočet úhlu natočení průřezu φ :

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{J_p \cdot G} \quad \varphi = \frac{10^7 \cdot 3\,500}{3\,131\,254,6 \cdot 8 \cdot 10^4}$$

$$\varphi = 0,139 \text{ rad}$$

Přepočítáme radiány na stupně:

$$\varphi^\circ = \varphi \cdot \frac{180}{\pi} \quad \varphi^\circ = 0,139 \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\varphi^\circ = 8,005$$

Kruhový hřídel se zkroutí o $\varphi = 8,005^\circ$

Použitá literatura:

MIČKAL, K. *Technická mechanika I*. Praha: INFORMATORIUM, 1997.

LEINVEBER, J. VÁVRA, P. *Strojnické tabulky*. Praha: ALBRA, 2005. ISBN 80-7361-011-6

„Pokud není uvedeno jinak, autorem textů a obrázků je Ing. Štěpánka Makoňová“